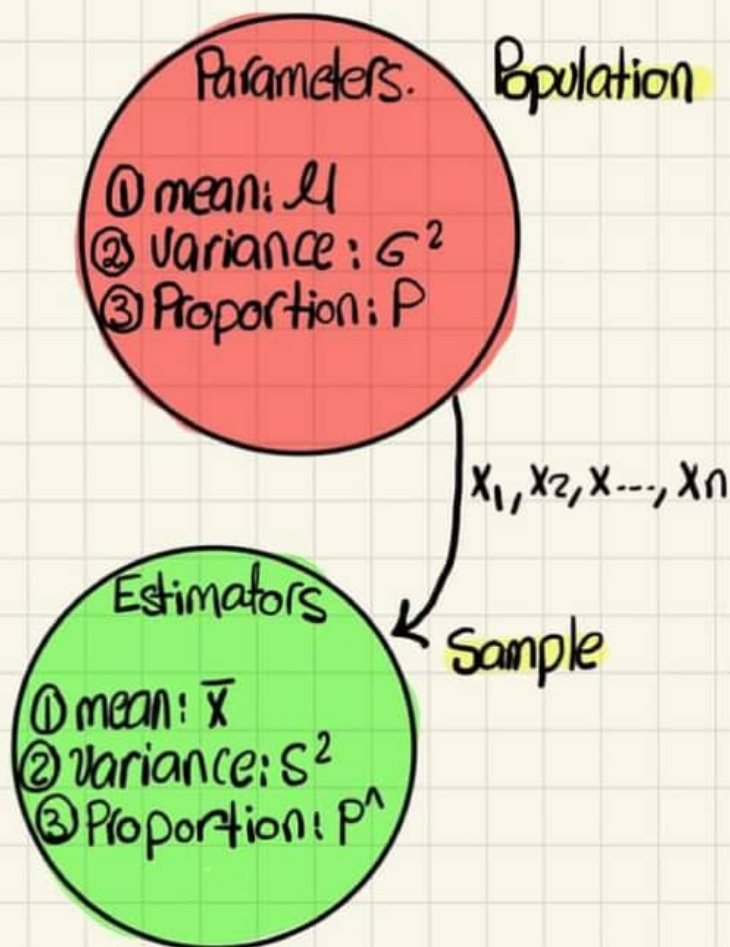


Statistics, lecture 21

لقد جاسر 14 +
خامسة 27 يونيو

ch 6: Confidence Interval.



\bar{x} is a point estimate of μ .
 s^2 " " " " of σ^2 .
 p^{\wedge} " " " " of P .

* ليس يمكننا فهم Point estimate
 لأنه قدرنا ال parameters بنقطة واحدة.

كيف سنو فقه ال Confidence Interval
 فقهنا انه لما اقدر قيمة μ مثلاً، هن
 ناع تابع بالقيمة \bar{x} واننا ز تكون

$$\mu \in \bar{x} \pm E = (\bar{x} - E, \bar{x} + E)$$

① ②

بليج E : Error / Margin of Error
 وبالتالي ال صارت مقدرة لفترة من نقطة
 وهاي الفترة اسمها Confidence Interval
 ونقيس فقه الفرق كل اي Parameter
 بدنا تقدير.

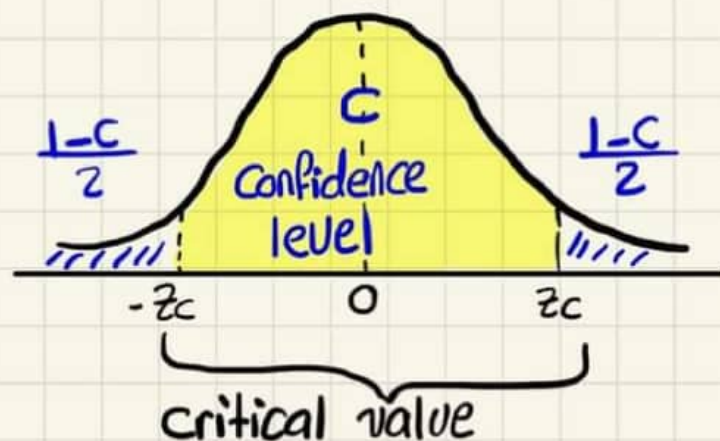
* C.I for μ :

$$\mu \in \bar{x} \pm E$$

ليج كيف احسبه

1. If σ is known:

$$E = z_c \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$



margin of error: $z_c \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ "error"

standard error: $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

ii) If σ is unknown, then :

$$\bar{X} \pm t_c \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \quad \text{or}$$

$$\bar{X} \pm z_c \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \quad \text{if } n \geq 30$$

* See example 1, Book, P 320

* " " 2, " , P 322

ملاحظة: لما تكل المثال وبدك تكسب z_c لطلو قيمة z_c - فن الجدول ولعدين اكن الانساق.

* See example 3, Book, P 323

* " " 5, " , P 325

لما تبلي تكسب z_c - ، بدك الرقم الي المساحة كل يار 0.05 ، فن رال تلاقه هاي المساحة بي في اقلها 0.0495 بقابلها الرقم -1.65 والي اكبرها 0.0505 ، -1.64 احب المتوسط الكساي للرجين بيطاع -1.645 وهو قيمة z_c - بالتالي z_c هي 1.645 .

* ماذا لو اطلاني E و C وطلب n ؟

$$E = z_c \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\sqrt{n} = \frac{z_c \cdot \sigma}{E} \Rightarrow n = \left(\frac{z_c \cdot \sigma}{E} \right)^2$$

كم ونقه القانونه لو σ مجهولة ، به لنقدرها S .

* See Example 6, Book, P 326

ملاحظة: لما حالك :

The sample mean is within 0.5 hour of the population mean

قصه :

$$E = 0.5$$

$$\mu - \bar{X} < 0.5$$

يعني

كمان ملاحظة: n بطلع قيمتها 81.29 لكن دايمًا لما تطلع كسر في نعل Round up فبتعير القيمة 82 .

* العلاقة بين n و E عكسية ، يعني كلما زادت n قل E والعكس صحيح.

* See example 2, Book, P 335

لما تتعامل مع جدول t 25 تطلع فلك قيمة t_c فبا شرح لا نه جداول t طايفها سوالب وبتعطي المساحة عاليين.

* See example 3, book, P 336

* " " 4, " , P 337

*** The point estimate of P ***

لنفترض بدي احب نسبة المدخنين في مجتمع باحد عينته منه ولتكن من 100 بتلفن فلا ، وبتوفاكم عدد المدخنين لنفترض لملعو 70 بتكون $P^* = 70\%$ وهي مقدار من المجتمع

$$P^* = \frac{x}{n}$$

x : number of successes

n : Sample size

* See example 1, Book, P 342

Confidence Interval for P:

$$P^{\wedge} \pm z_c \cdot \sqrt{\frac{P^{\wedge} q^{\wedge}}{n}} \quad \begin{matrix} P^{\wedge} n > 5 \\ q^{\wedge} n > 5 \end{matrix}$$

Error / margin of error

$$\sqrt{\frac{P^{\wedge} q^{\wedge}}{n}} : \text{Standard error}$$

* هذا لو طلبت نسبة n

$$\left(\frac{E}{z_c}\right)^2 = \frac{P^{\wedge} q^{\wedge}}{n}$$

$$n = P^{\wedge} q^{\wedge} \times \left(\frac{z_c}{E}\right)^2$$

known unknown
 $P^{\wedge} = 0.5$

* See example 2, Book, P344 ~

* " " 3, " , P345 ~

* " " 4, " , P346 ~

Let L and U be functions of $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. (L, U) is $(1-\alpha)100\%$ C.I. ($0 < \alpha < 1$) for θ if:

$$P(L < \theta < U) = 1 - \alpha$$

$1 - \alpha$: confidence coefficient.

α : significance level.

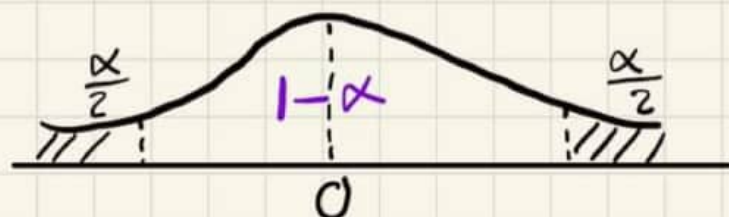
L: Lower confidence Limit (L.C.L)

U: Upper " " (U.C.L)

Note: If $x_1, x_2, \dots, x_n \stackrel{r.s}{\sim} n(\mu, \sigma^2)$
 then $\bar{x} \sim n\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ or

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim n(0, 1)$$

$$P(-z_{\frac{\alpha}{2}} < z < z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$$



$$P(-z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} < z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$$

$$P(-z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x} - \mu < z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$

$$P(-\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < -\mu < -\bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$

$$P(\bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} > \mu > \bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$

the $(1-\alpha)100\%$ C.I. for μ is:

$$\left(\underbrace{\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_L, \underbrace{\bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_U \right)$$

Point estimate of μ اذا اكلت الفترة وقلب
 جميع الكدين وبتقسم كل 2

e.g) The salaries of teachers in Jordan for 1990-2000 are normally distributed with standard deviation 50 JD. The average salary based on a sample of 400 teachers for 1990-2000 was 215 JD Per month.

a) what is the point estimate for the mean salaries and it's S.E?

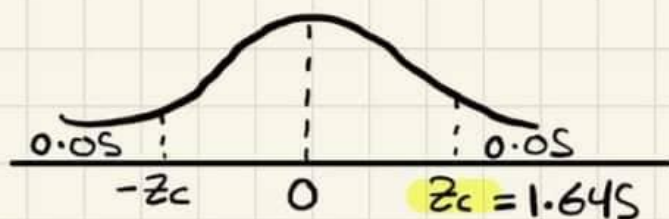
b) Give a 90% C.I. for the mean salaries.

c) Give a 95% C.I. for the mean salaries.

Sol) $X_1, X_2, X_3, \dots, X_{400} (M, S^2)$
 $\bar{X} = 215$

a) Point estimate for μ is $\bar{X} = 215$
 $S.E = \frac{S}{\sqrt{n}} = 2.5$

b) $n = 400$ $\bar{X} = 215$ $C = 0.90$



$$E = 4.11 \Rightarrow (\bar{X} - 4.11, \bar{X} + 4.11) \\ (211.11, 219.11)$$

c) $z_c = 1.96$

$$E = 4.9 \Rightarrow (215 - 4.9, 215 + 4.9) \\ (210.1, 219.9)$$

ملحوظة: كلما زادت قيمة "C" أو عالت قيمة القيمة
 "1 - α " ز. زيد طول الفترة، يعني بتتبير "wider"
 وبالعكس بتقل قيمة "1 - α " أو عالت قيمة القيمة $\frac{\alpha}{2}$

e.g) A researcher wants to estimate the average weight loss of people who are on a new diet plan. In a previous study, the population standard deviation σ of weight

losses is about 5 kgs. How large a sample should be to estimate the mean weight loss by a 95% C.I. to within 1.5 kg?

Sol) $\sigma = 5$ $E = 1.5$ $C = 0.95$
 $z_c = 1.96 \Rightarrow$ قبل بتوي حستجا

$$n = \left(\frac{z_c \times \sigma}{E} \right)^2 \\ = 42.68 \approx 43 \text{ "always round up"}$$

e.g) Suppose that Jordan Bureau of census in 2004 wants to estimate the mean size μ of all Jordan families by 99% C.I. It is known that the standard deviation $\sigma = 1.5$. How large a sample size should be the Bureau to estimate μ within 0.02 of the population mean.

Sol) $C = 0.99$ $z_c = 2.575$
 $\sigma = 1.5$ $E = 0.02$

$$n = \left(\frac{z_c \cdot \sigma}{E} \right)^2 \approx 37298$$