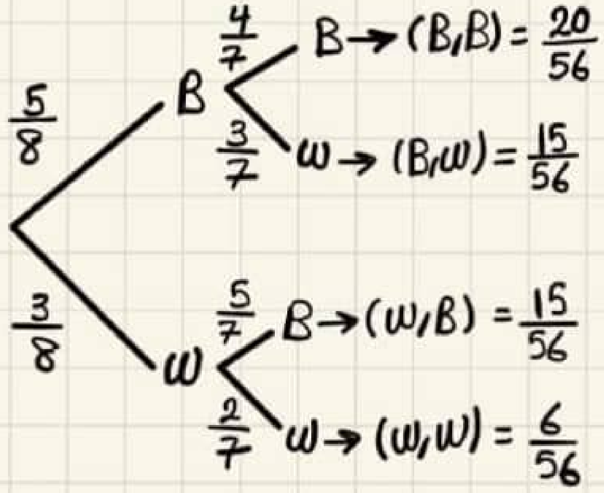
Statistics, lecture 13:

e.g)

5	3
B	W

2 balls are selected at random. Let the r.v. Y be the no. of black balls obtained, find the Prob distribution of Y.

Sol) Tree diagram بما انّه افترنا كيفرين اذاً نغل اولاً و نفترض عدم الارجاع.



Y	0	1	2
$P(Y=y)$	$\frac{6}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{20}{56}$

* Properties of variance *

① $var(a) = 0$, a : Constant

② $var(aX) = a^2 \cdot var(X)$

③ $var(aX \pm b) = var(aX)$

④ $E(X^2) = var(X) + (E(X))^2$

$= \sigma^2 + \mu^2$

e.g) If $\mu = 10$, $\sigma^2 = 3$, then find:

i) $E(var(X)) = E(3) = 3$

ii) $var(E(X)) = var(10) = 0$

iii) $var(var(X)) = var(3) = 0$

iv) $var(2X-3) = 4\,var(X) = 12$

v) $S.D(3-2X) = \sqrt{4\,var(X)} = \sqrt{12}$

vi) $E(X-10)^2 = var(X) = 3$

vii) $E(X^2) = 3 + 100 = 103$

viii) $E(X-2)^2 = E(X^2 - 4X + 4)$

$= E(X^2) - E(4X) + E(4)$

$= 103 - 4(10) + 4$

$= 67$

****

* The binomial distribution *

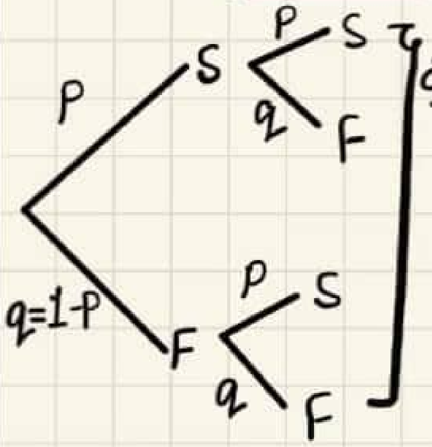
س: متى نسمّي التجربة "تجربة برنولي" ؟

ج: لمّا يكون للتجربة نتيجتين فقط "شيء وعكسه" نسميها "Success or Fail" ومن الامثلة على ذلك:

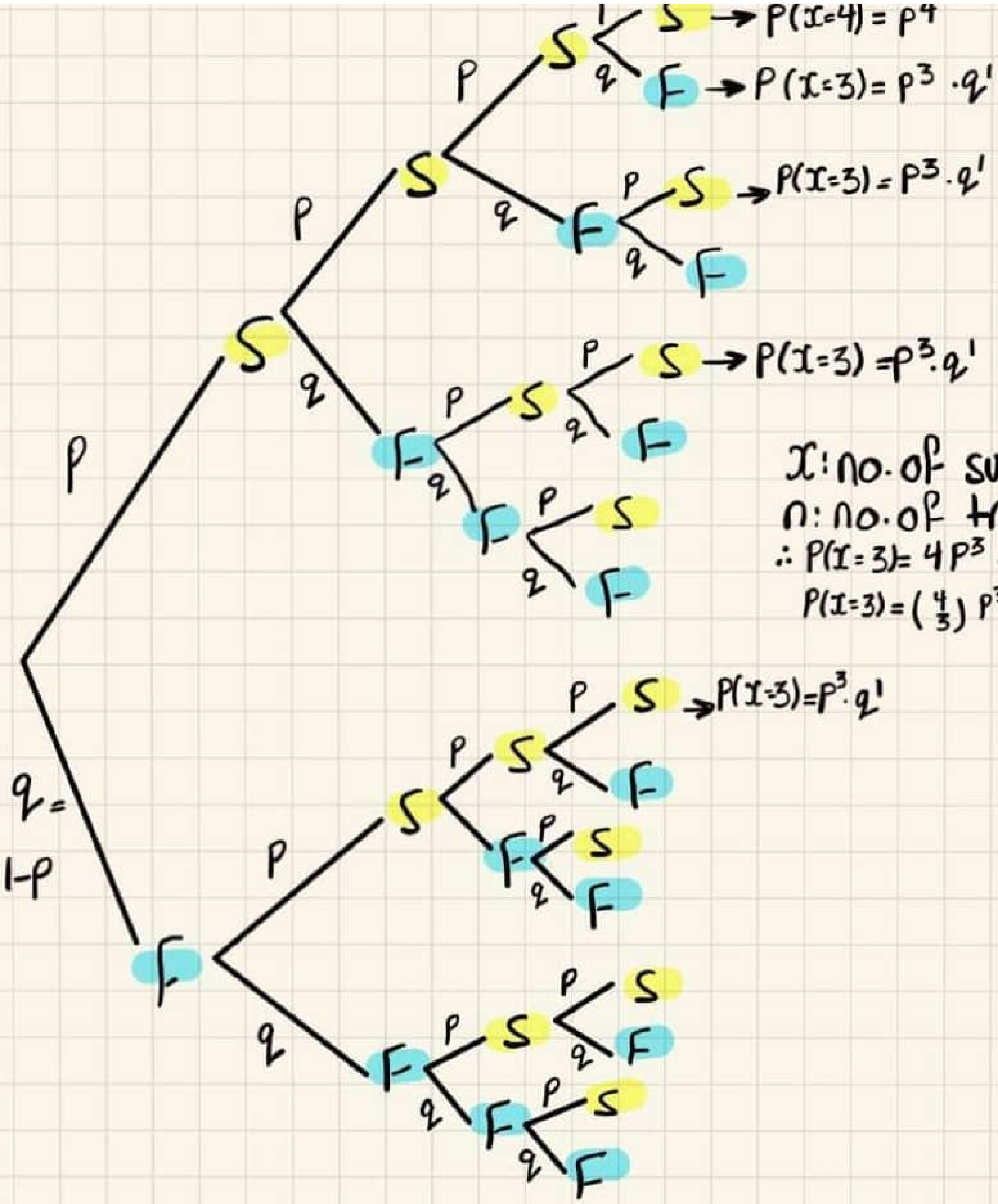
١_ تجربة رمي قطعة نقدية "صورة او كتابة"

٢_ " " ماجر نرد انا مهتمين يطلع الرقم 5 مثلاً "5', 5"

وعشان تكون التجربة binomial لازم يكونو التجارب Independant وما بأثروا على بعض واسهل مثال هو رمي قطعة نقدية --- انظر ↓



لوحها كررت التجربة الاحتمالات نفسها ما تتغير



X: no. of successes

n: no. of trials, n = 4

$\therefore P(X=3)=4p^3\cdot q^1$

$P(X=3)=\binom{4}{3}p^3\cdot q^{4-3}$

ملاحظة :- Tree diagram لـ ٣ مرّات بتكون مقبولة لكن بعد هيك بتصير مزعجة لذلك ماتاجيبه قاعدة متى نتعامل معها

* مؤشرات انه السؤال Binomial :-

① تكرار التجربة اكثر من ٣ مرات

② كل مرة عندي نتيجتين فقط "اشي وعكسه"

③ تكون التجارب Independent .

*If we have n-independent trials ($n \geq 3$) and the outcomes in each trial are success(S) or fail(F) only. Let x be the no. of successes, then we say that x follows a binomial distribution and is denoted by $x \sim Bin(n,P)$:

where n: no. of trials

P: Probability of successful in each trial

Thus, if $x \sim Bin(n,P)$, then the P.d.f is given by:

$$P(X=x) = \binom{n}{x} \cdot P^{x} \cdot q^{n-x} \quad ;$$

$q = 1-P$ and $x = 0,1,2,3 \ldots n$

↳ "non negative integers up to n"

Notes:

① $\mu = E(X) = nP$

② $\sigma^2 = nPq = var(X)$

③ $\sigma = \sqrt{nPq}$

e.g) When tossing a fair coin 10 times find: a) The Prob. of getting:

i) exactly 8 heads

ii) At least 9 heads

iii) At " 2 "

iv) At most 1 head

v) " " 8 heads

vi) " " 2 " given that at least 1 head

b) The expected no. of heads, the variation and the standard deviation.

Sol)

$n = 10$ $\quad X$: no. of heads $\quad P = 0.5$

$X \sim Bin(n,P)$

a)

i) $P(X=8) = \binom{10}{8}(0.5)^8(1-0.5)^2$

كـ عالحاسبة او يدويًا

ii) $P(X \geq 9) = P(X=9) + P(X=10)$

$= \binom{10}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^9\left(\frac{1}{2}\right) + \binom{10}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^0$

$= \frac{11}{1024}$

iii) $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2)$

↳ دايماً لما تاخد ال complement اذا في مساواة شيلها واعكس الاشارة، واذا ما في مساواة حط مساواة واعكس الاشارة دضو

$= 1 - P(X \leq 1)$

$= 1 - (P(X=1) + P(X=0))$

$= 1 - \left(\binom{10}{1}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^9 + \binom{10}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right)$

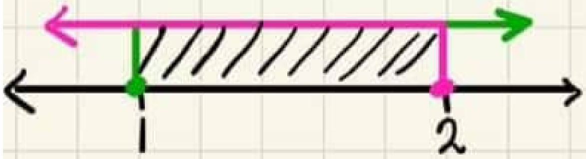
$1 - \frac{11}{1024} = \frac{1013}{1024}$

iv) $P(x \leq 1) = \frac{11}{1024}$

v) $P(x \leq 8) = 1 - P(x > 8) = 1 - P(x \geq 9)$

$= \frac{1013}{1024}$

vi) $P(x \leq 2 \mid x \geq 1)$



$$\frac{P(1 \leq x \leq 2)}{P(x \geq 1)} = \frac{P(x=1) + P(x=2)}{1 - P(x=0)}$$

وبنحسب عادي

) $E(x) = nP = (10)(0.5) = 5$

$var(x) = npq = (10)(0.5)(1-0.5) = 2.5$

$Sd = \sqrt{2.5}$