Unit 3 Probability

ASSOCIATE PROFESSOR DIANA ARABIAT, RN, PHD

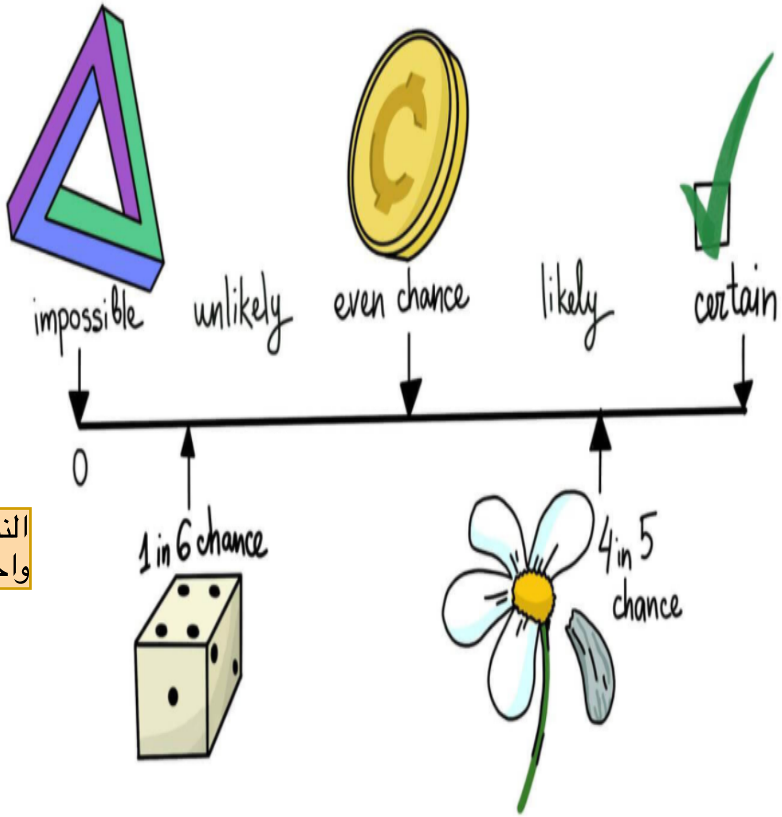
تطورت نظرية الاحتمالات من دراسة
ألعاب الحظ مثل النرد والبطاقات. تسمى
عملية مثل رمي العملة المعدنية، أو رمي
النرد، أو سحب بطاقة من مجموعة أوراق
اللعب، بتجربة الاحتمالية.

Probability

Probability theory developed from the study of games of chance like dice and cards. A process like flipping a coin, rolling a die or drawing a card from a deck is called a ***probability experiment***.

النتيجة هي نتيجة محددة لتجربة
واحدة لتجربة احتمالية.

An ***outcome*** is a specific result of a single trial of a probability experiment.



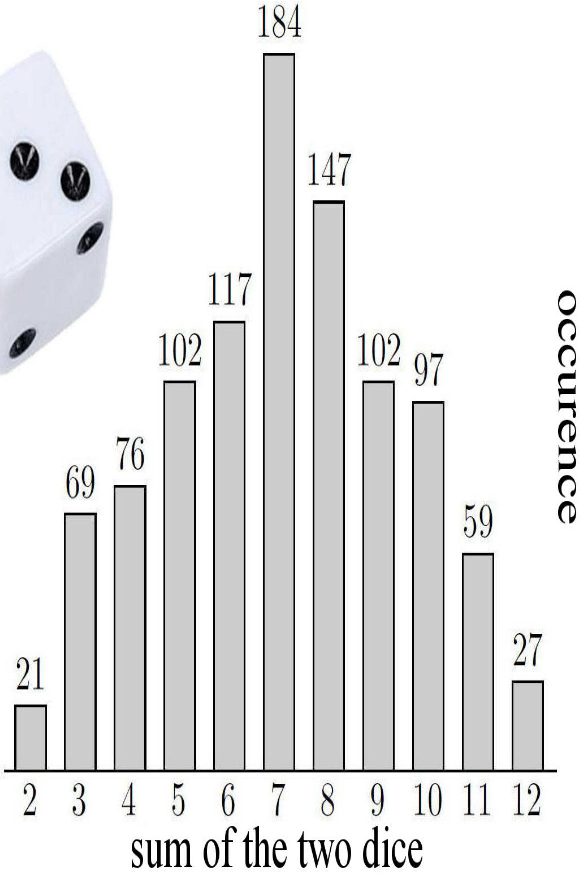
Probability distributions

Probability theory is the foundation for ***statistical inference***.

نظرية الاحتمالية هي أساس الاستدلال الإحصائي.

A ***probability distribution*** is a device for indicating the values that a random variable may have.

التوزيع الاحتمالي هو أداة للإشارة إلى القيم التي قد يحتوي عليها المتغير العشوائي.



There are two categories of random variables. These are:

- ***discrete random variables***,

And

- ***continuous random variables***.

هناك فئتان من المتغيرات العشوائية. هؤلاء هم:

- المتغيرات العشوائية المنفصلة،

و

- المتغيرات العشوائية المستمرة.

A **discrete random variable** has either a finite or countable number of values. The values of a discrete random variable can be plotted on a number line with space between each point.

يحتوي المتغير العشوائي المنفصل إما على عدد
محدود أو معدود من القيم. يمكن رسم قيم المتغير
العشوائي المنفصل على خط الأعداد مع وجود
مسافة بين كل نقطة.

A **continuous random variable** has infinitely many values. The values of a continuous random variable can be plotted on a line in an uninterrupted fashion.

المتغير العشوائي المستمر له عدد
لا نهائي من القيم. يمكن رسم قيم
المتغير العشوائي المستمر على
خط بطريقة متواصلة.

Discrete Random Variables	Continuous Random Variables
Number of girls in a classroom	Height of boys in a class
Number of blue marbles in a bag	Weight of students in a class
Number of heads when flipping a coin	Amount of lemonade in a jug
Number of typos on a page	Time it takes to run a race

Discrete Probability Distributions

Binomial distribution – the random variable can only assume 1 of 2 possible outcomes. There are a fixed number of trials and the results of the trials are independent.

- i.e. flipping a coin and counting the number of heads in 10 trials.

التوزيع ذو الحدين – يمكن للمتغير العشوائي أن يفترض فقط 1 من نتيجتين محتملتين. هناك عدد محدد من التجارب ونتائج التجارب مستقلة.

- أي تقليب العملة المعدنية وإحصاء عدد الوجوه في 10 محاولات.

Poisson Distribution – random variable can assume a value between 0 and infinity.

- Counts usually follow a Poisson distribution (i.e. number of ambulances needed in a city in a given night)

توزيع بواسون - يمكن للمتغير العشوائي أن يفترض قيمة بين 0 واللانهاية.

- تتبع الأعداد عادة توزيع بواسون (أي عدد سيارات الإسعاف اللازمة في المدينة في ليلة معينة)

Discrete Random Variable

يحتوي المتغير العشوائي المنفصل X على عدد محدود من القيم المحتملة. يسرد التوزيع الاحتمالي لـ X القيم واحتمالاتها.

A discrete random variable X has a finite number of possible values. The probability distribution of X lists the values and their probabilities.

Value of X	x_1	x_2	x_3	…	x_k
Probability	p_1	p_2	p_3	…	p_k

1. Every probability p_i is a number between 0 and 1.
2. The sum of the probabilities must be 1.

Find the probabilities of any event by adding the probabilities of the particular values that make up the event.

1. كل احتمال p i هو رقم بين 0 و 1.

2. يجب أن يكون مجموع الاحتمالات 1.

ابحث عن احتمالات أي حدث عن طريق إضافة احتمالات القيم المحددة التي يتكون منها الحدث.

Example

The instructor in a large class gives 15% each of A's and D's, 30% each of B's and C's and 10% F's. The student's grade on a 4-point scale is a random variable X (A=4).

Grade	F=0	D=1	C=2	B=3	A=4
Probability	0.10	.15	.30	.30	.15

What is the probability that a student selected at random will have a B or better?

ANSWER: P (grade of 3 or 4)=P(X=3) + P(X=4)

= 0.3 + 0.15 = 0.45

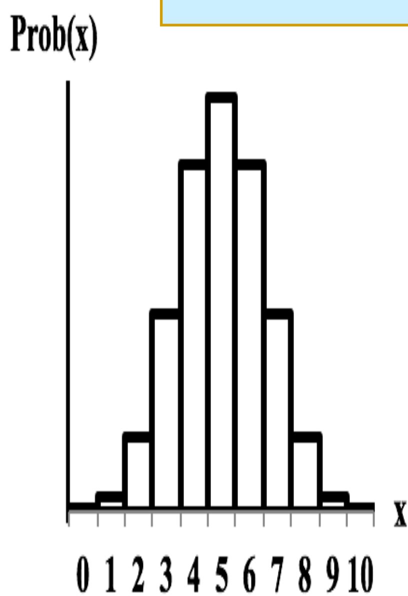
Continuous Probability Distributions

عندما يتبع توزيع ذو الحدين أو توزيع بواسون،
يقتصر المتغير على أخذ القيم الصحيحة فقط.

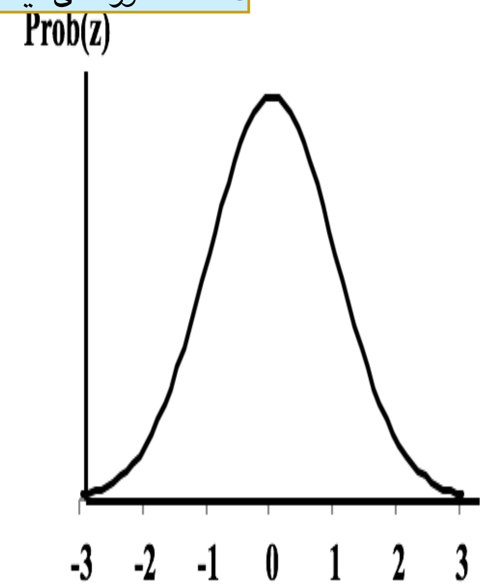
بين قيمتين للمتغير العشوائي المستمر يمكننا
دائمًا العثور على قيمة ثالثة.

When it follows a Binomial or a Poisson distribution the variable is restricted to taking on integer values only.

Between two values of a continuous random variable we can always find a third.



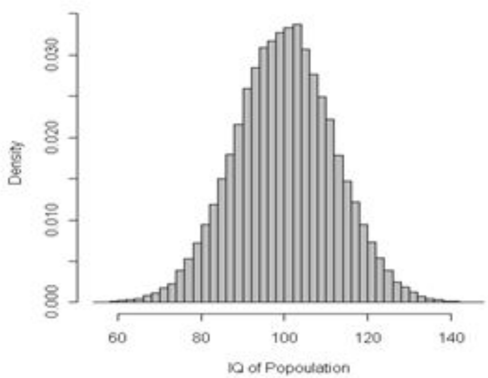
Binomial Distribution
Discrete Data & Discrete
Probability Curve

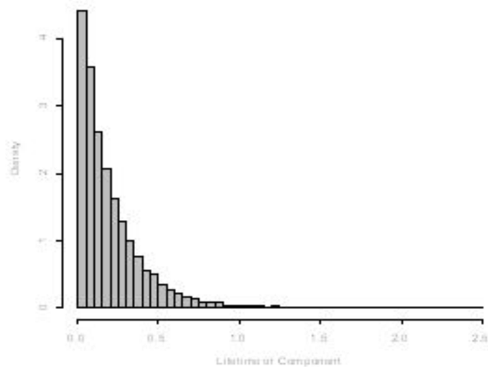


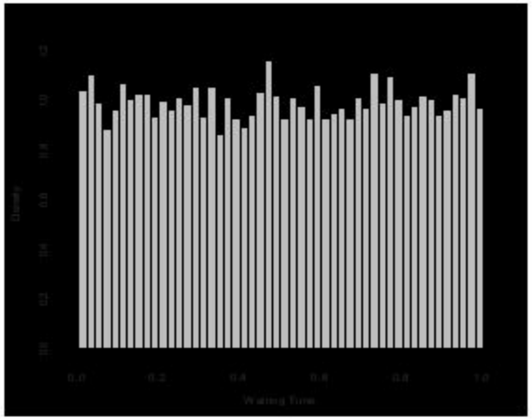
Standard Normal Distribution
Continuous Data and Continuous
Probability Curve

Continuous Probability Distributions

- Experiments can lead to continuous responses i.e. values that do not have to be whole numbers. For example: height could be 1.54 meters etc.
- In such cases the sample space is best viewed as a histogram of responses.
- The <u>Shape</u> of the histogram of such responses tells us what continuous distribution is appropriate – there are many.

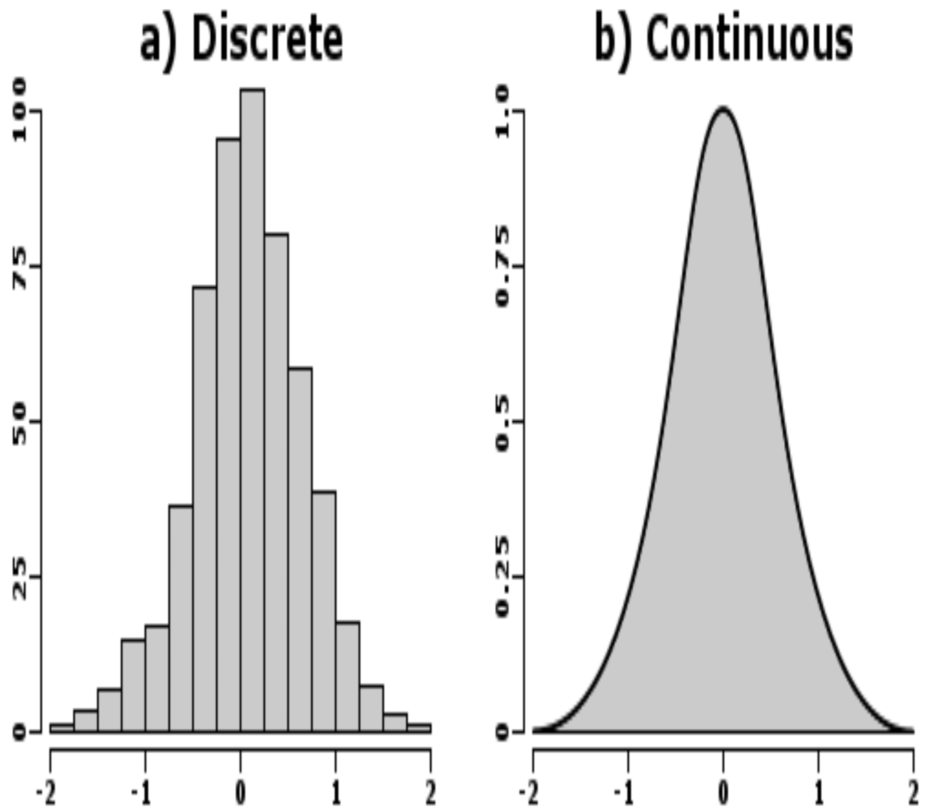






A histogram is used to represent a discrete probability distribution and a smooth curve called the *probability density* is used to represent a continuous probability distribution.

يتم استخدام الرسم البياني لتمثيل التوزيع الاحتمالي المنفصل ويستخدم منحنى سلس يسمى كثافة الاحتمال لتمثيل التوزيع الاحتمالي المستمر.



Continuous Variable

A ***continuous probability distribution*** is a ***probability density function***.

The area under the smooth curve is equal to 1 and the frequency of occurrence of values between any two points equals the total area under the curve between the two points and the x-axis.

التوزيع الاحتمالي المستمر هو دالة كثافة الاحتمال.

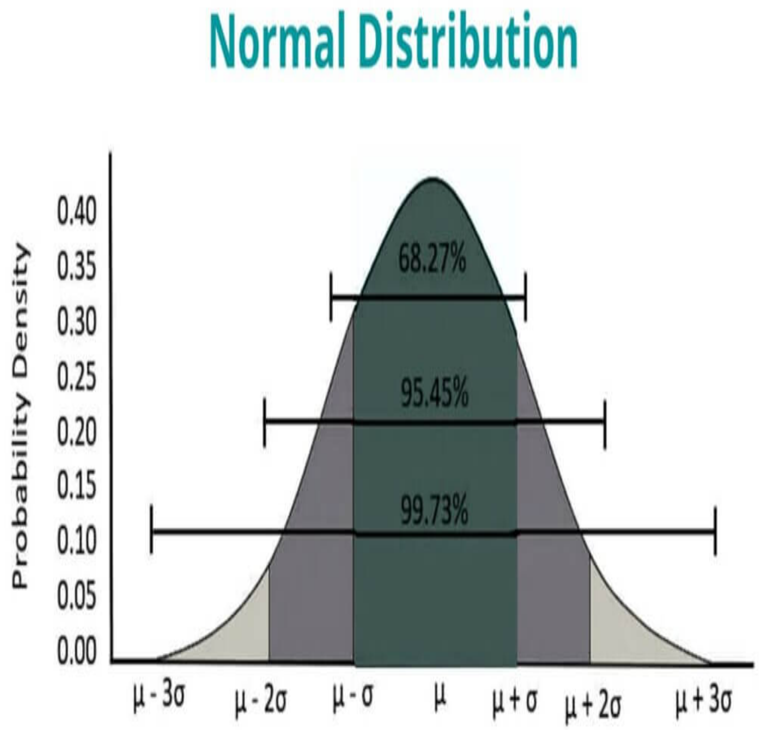
المساحة تحت المنحنى السلس تساوي 1 وتكرار حدوث القيم بين أي نقطتين يساوي المساحة الكلية تحت المنحنى بين النقطتين والمحور السيني.

Normal Distribution

ويسمى أيضًا منحنى على شكل جرس، أو منحنى عادي، أو توزيع غاوسي.

التوزيع الطبيعي هو التوزيع الأحادي المتماثل، وليس الذروة أو المسطح.

- Also called bell shaped curve, normal curve, or Gaussian distribution.
- A normal distribution is one that is unimodal, symmetric, and not too peaked or flat.
- Given its name by the French mathematician Quetelet who, in the early 19th century noted that many human attributes, e.g. height, weight, intelligence appeared to be distributed normally.



أطلق عليها اسم عالم الرياضيات الفرنسي كويتيليت، الذي لاحظ في أوائل القرن التاسع عشر أن هناك العديد من الصفات البشرية، على سبيل المثال. يبدو أن الطول والوزن والذكاء موزع بشكل طبيعي.

Normal Distribution

المنحنى الطبيعي أحادي الواسطة ومتماثل حول متوسطه (μ).

في هذا التوزيع، يكون المتوسط والوسيط والمنوال متطابقين.

يحدد الانحراف المعياري (σ) مقدار التشتت حول المتوسط.

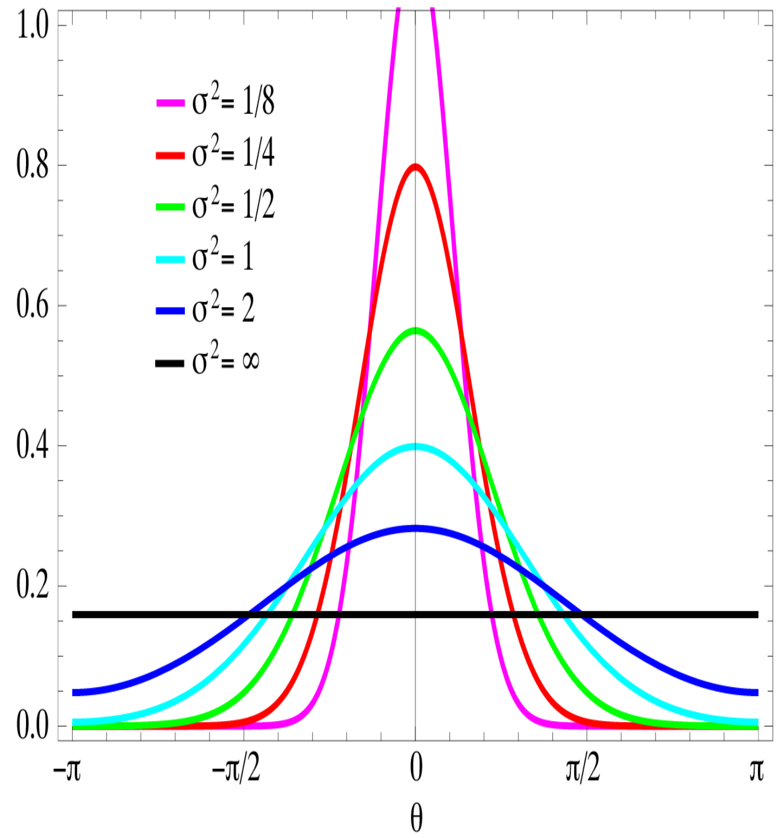
تحدد المعلمتان μ و σ المنحنى الطبيعي بشكل كامل.

The normal curve is unimodal and symmetric about its mean (μ).

In this distribution the mean, median and mode are all identical.

The standard deviation (σ) specifies the amount of dispersion around the mean.

The two parameters μ and σ completely define a normal curve.



Normal Distribution

Also called a Probability density function. The probability is interpreted as "area under the curve."

The random variable takes on an infinite # of values within a given interval

وتسمى أيضًا دالة الكثافة الاحتمالية. يتم تفسير الاحتمال على أنه "منطقة تحت المنحنى".

يأخذ المتغير العشوائي عددًا لا نهائيًا من القيم خلال فترة زمنية معينة

The probability that X = any particular value is 0. Consequently, we talk about intervals. The probability is = to the area under the curve.

The area under the whole curve = 1.

احتمال أن X = أي قيمة معينة هو 0.
وبالتالي، فإننا نتحدث عن فترات.
الاحتمال هو = للمساحة تحت المنحنى.

المساحة تحت المنحنى = 1

Properties of a Normal Distribution

1. It is symmetrical about m .
2. The mean, median and mode are all equal.
3. The total area under the curve above the x-axis is 1 square unit. Therefore 50% is to the right of m and 50% is to the left of m.
4. Perpendiculars of:

   ±1 s contain about 68%;
   ±2 s contain about 95%;
   ±3 s contain about 99.7%

of the area under the curve.

1. إنه متماثل حول م .

2. المتوسط والوسيط والمنوال كلها متساوية.

3. المساحة الإجمالية تحت المنحنى فوق المحور السيني هي 1 وحدة مربعة. وبالتالي فإن 50% على يمين m و50% على يسار m.

4. عمودي:
تحتوي على حوالي 68%: ±1s
تحتوي على حوالي 95%: ±2 s
تحتوي على حوالي 99.7% ±3s
من المساحة تحت المنحنى.

The Standard Normal Distribution

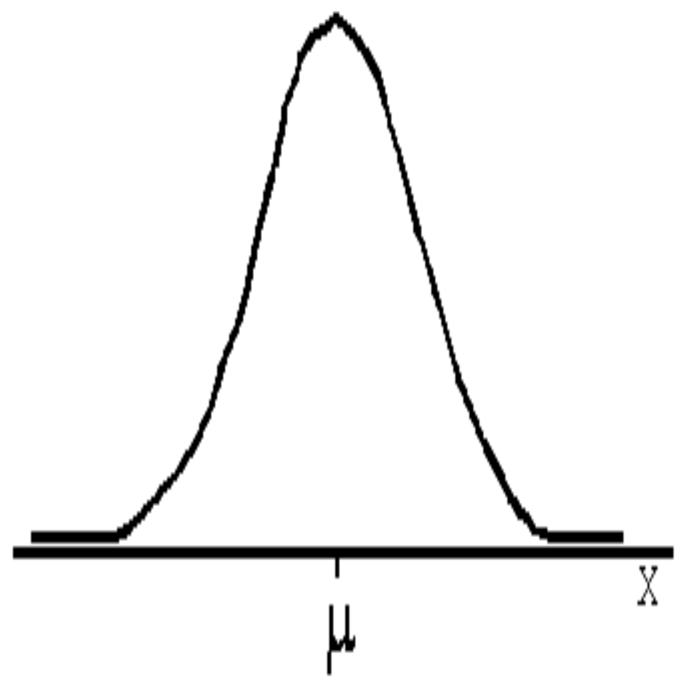
A ***normal distribution*** is determined by μ and σ. This creates a family of distributions depending on whatever the values of μ and σ are.

The ***standard normal distribution*** has

μ=0 and σ =1.

يتم تحديد التوزيع الطبيعي بواسطة μ و σ.
يؤدي هذا إلى إنشاء مجموعة من التوزيعات
اعتمادًا على قيم μ و σ.

التوزيع الطبيعي القياسي لديه



Standard Z Score

The ***standard z score*** is obtained by creating a variable z whose value is

يتم الحصول على درجة z القياسية
عن طريق إنشاء متغير z قيمته

$$z = \frac{(x - \mu)}{\sigma}$$

Given the values of μ and σ we can convert a value of x to a value of z and find its probability using the table of normal curve areas.

بالنظر إلى قيم μ و σ يمكننا تحويل
قيمة x إلى قيمة z وإيجاد احتمالها
باستخدام جدول مناطق المنحنى
الطبيعي.

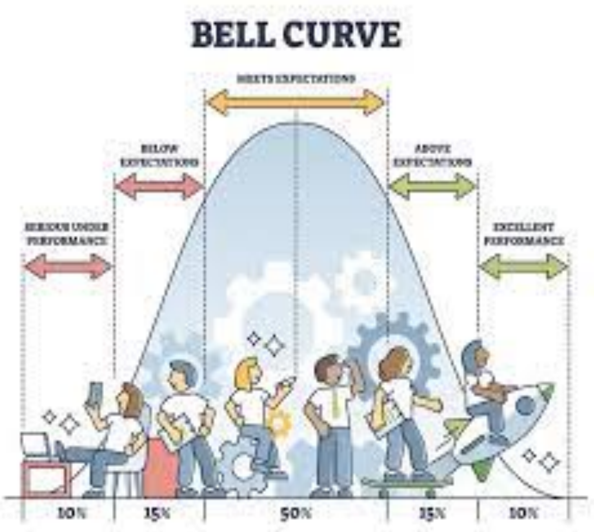
Importance of Normal Distribution to Statistics

- Although most distributions are not exactly normal, most variables tend to have approximately normal distribution.
- Many inferential statistics assume that the populations are distributed normally.
- The normal curve is a probability distribution and is used to answer questions about the likelihood of getting various particular outcomes when sampling from a population.

على الرغم من أن معظم التوزيعات ليست طبيعية تماماً ، إلا أن معظم المتغيرات تميل إلى أن يكون لها توزيع طبيعي تقريباً .

تفترض العديد من الإحصائيات الاستدلالية أن السكان يتم توزيعهم بشكل طبيعي.

المنحنى الطبيعي هو توزيع احتمالي ويستخدم للإجابة على أسئلة حول احتمالية الحصول على نتائج معينة مختلفة عند أخذ العينات من مجتمع ما.



Why Do We Like The Normal Distribution So Much?

لا يوجد شيء "خاص" فيما يتعلق بالنتائج العادية القياسية

○ يمكن حسابها للملاحظات من أي عينة/مجموعة من قيم البيانات المستمرة

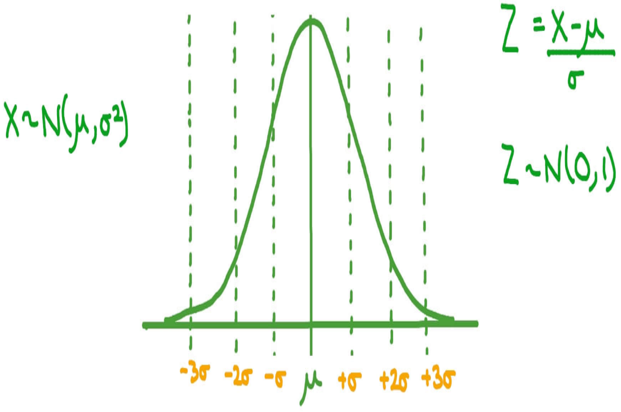
○ تقيس النتيجة مدى بعد الملاحظة عن متوسطها بالوحدات القياسية للمسافة الإحصائية

ولكن، إذا كان التوزيع غير طبيعي، فقد لا نتمكن من استخدام نهج Z-score.

There is nothing “special” about standard normal scores

- These can be computed for observations from any sample/ population of continuous data values
- The score measures how far an observation is from its mean in standard units of statistical distance

But, if distribution is not normal, we may not be able to use Z-score approach.



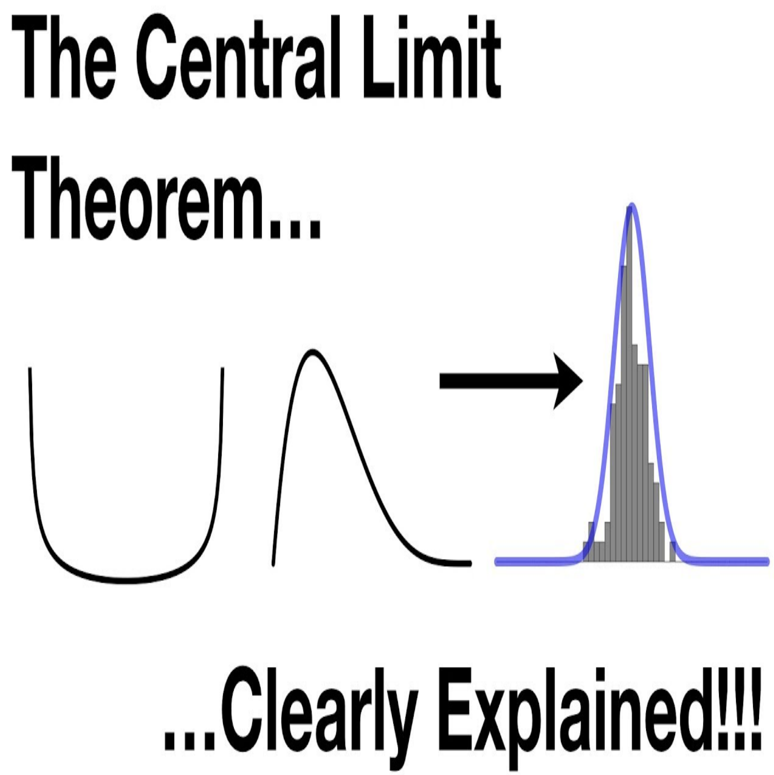
Normal Distribution

Q Is every variable normally distributed?

A Absolutely not

Q Then why do we spend so much time studying the normal distribution?

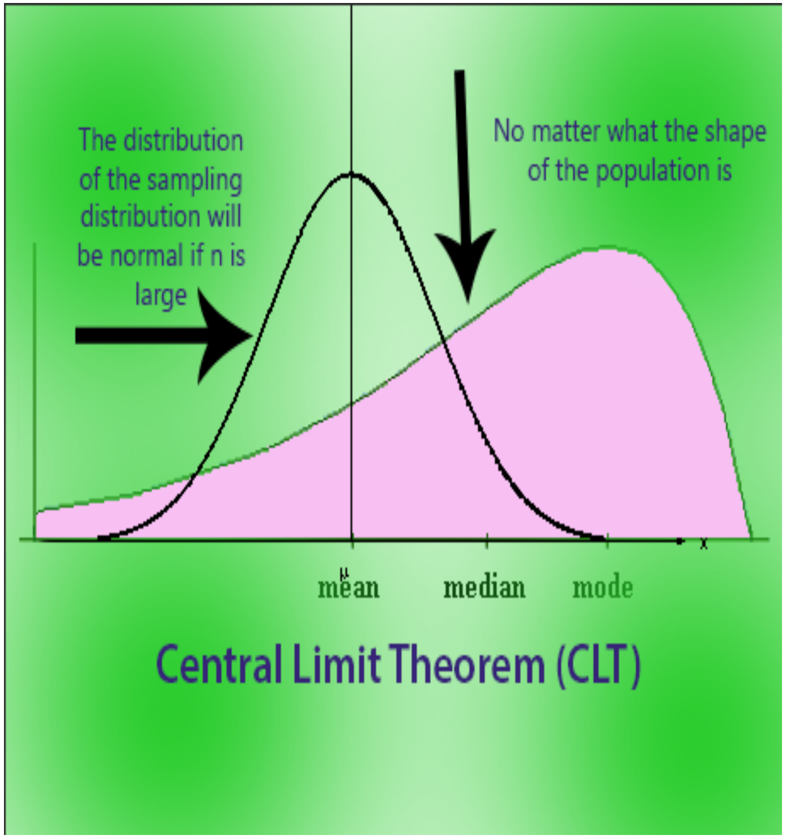
A Some variables are normally distributed; a bigger reason is the “Central Limit Theorem”!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!????????????



Central Limit Theorem

describes the characteristics of the "**population of the means"** which has been created from the means of an infinite number of random population samples of size (N), all of them drawn from a given "**parent population**".

يصف خصائص "مجتمع الوسائل" الذي تم إنشاؤه من وسائل عدد لا حصر له من العينات السكانية العشوائية ذات الحجم (N)، وجميعها مأخوذة من "سكان أصليين" محددين.



Theorem

Central Limit Theo

ويتوقع أنه بغض النظر عن توزيع السكان الأصليين:

- متوسط مجتمع الوسائل يساوي دائمًا متوسط المجتمع الأصلي الذي تم سحب العينات السكانية منه.
- الانحراف المعياري لمجتمع الوسط يساوي دائمًا الانحراف المعياري لمجتمع الأصل مقسومًا على الجذر التربيعي لحجم العينة (N).
- سيقترب توزيع الوسائل بشكل متزايد من التوزيع الطبيعي مع زيادة حجم العينات N.

It predicts that <u>regardless of the distribution of the parent population</u>:

- The **mean** of the population of means is always equal to the mean of the parent population from which the population samples were drawn.
- The **standard deviation** of the population of means is always equal to the standard deviation of the parent population divided by the square root of the sample size (N).
- The distribution of means will increasingly approximate a **normal distribution** as the size N of samples increases.

Central Limit Theorem (CLT)

['sen-trəl 'li-mət 'thē-ə-rəm]

The principle that the distribution of sample means approximates a normal distribution as the sample size gets larger, regardless of the population's distribution.

Central Limit Theorem

بالإضافة إلى ذلك، إذا كان المتغير المُقاس هو في الواقع مزيج من عدة متغيرات أخرى غير مترابطة، وجميعها "ملوثة" بخطأ عشوائي لأي توزيع، فإن قياساتنا تميل إلى أن تكون ملوثة بخطأ عشوائي يتم توزيعه عادةً على أنه عدد هذه المتغيرات تزداد. وهكذا ، فإن نظرية الحد المركزي تشرح وجود "التوزيع الطبيعي" الشهير على شكل جرس (أو "التوزيع الغاوسي") في مجال القياسات.

A consequence of Central Limit Theorem is that if we average measurements of a particular quantity, the distribution of our average tends toward a normal one.

إحدى نتائج نظرية الحد المركزي هي أنه إذا قمنا بحساب متوسط قياسات كمية معينة، فإن توزيع المتوسط يميل نحو التوزيع الطبيعي.

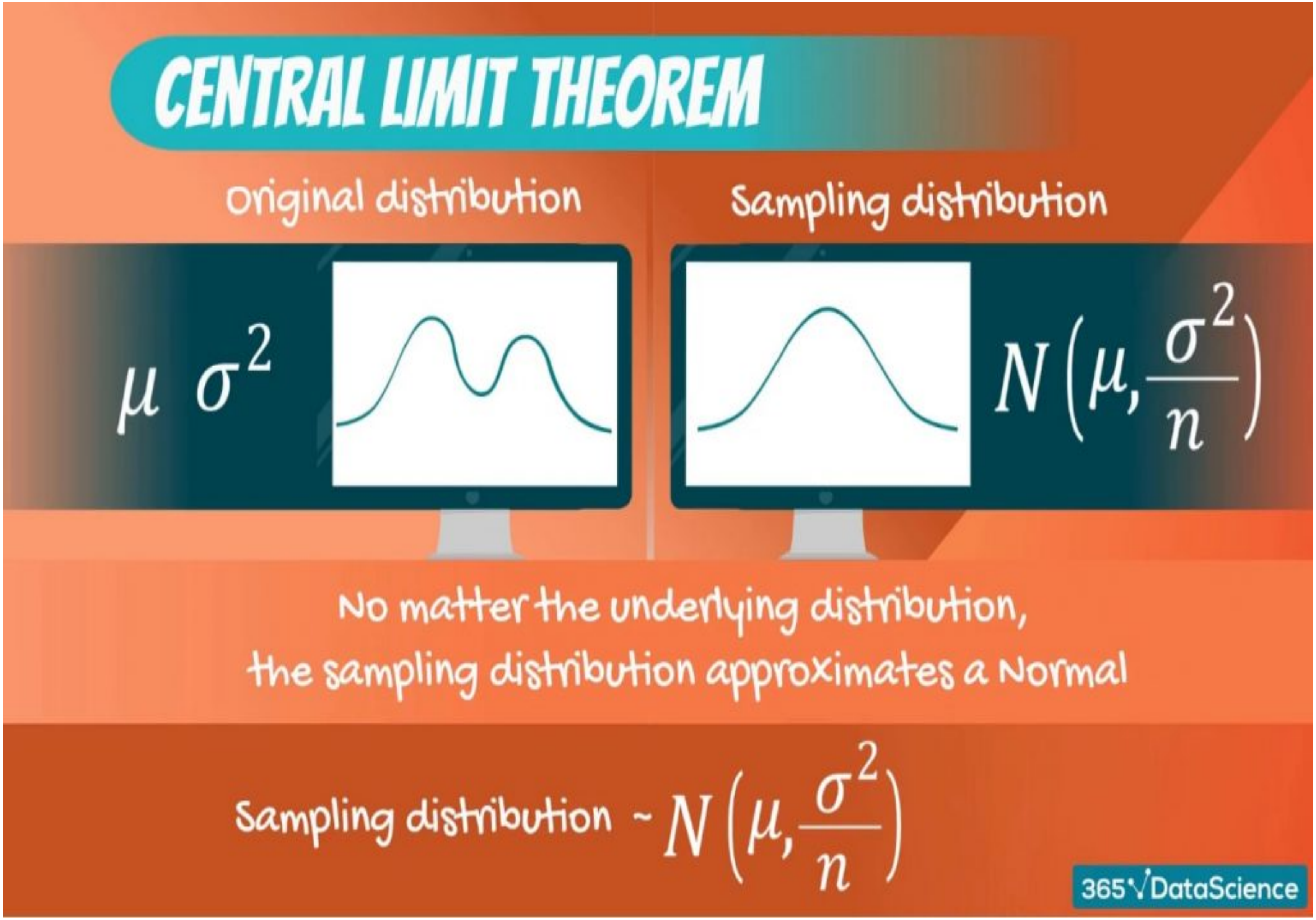
In addition, if a measured variable is actually a combination of several other uncorrelated variables, all of them "contaminated" with a random error of any distribution, our measurements tend to be contaminated with a random error that is normally distributed as the number of these variables increases. Thus, the Central Limit Theorem explains the ubiquity of the famous bell-shaped "Normal distribution" (or "Gaussian distribution") in the measurements domain.

Central Limit Theorem

$$\mu_{\bar{x}} = \mu$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_x}{\sigma_{\bar{x}}}$$


CENTRAL LIMIT THEOREM
Original distribution
Sampling distribution
$\mu \ \sigma^2$
$N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$
No matter the underlying distribution,
the sampling distribution approximates a Normal
Sampling distribution ~ $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$
365√DataScience

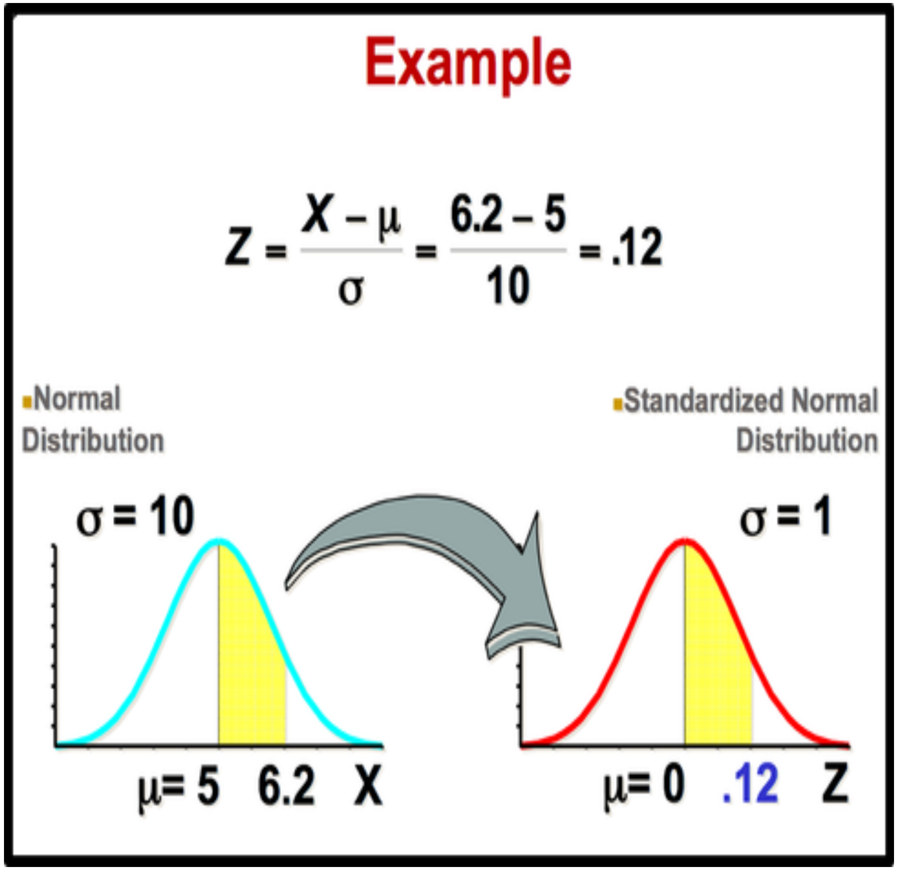
Normal Distribution

لاحظ أن التوزيع الطبيعي يتم تعريفه بواسطة معلمتين، μ و σ . يمكنك رسم التوزيع الطبيعي لأي مجموعة μ وσ.

يوجد توزيع طبيعي واحد وهو Z وهو خاص. يحتوي على μ = 0 و σ = 1. هذا هو التوزيع Z، ويسمى أيضًا التوزيع الطبيعي القياسي. إنها واحدة من تريليونات التوزيعات الطبيعية التي كان بإمكاننا اختيارها.

Note that the normal distribution is defined by two parameters, μ and σ . You can draw a normal distribution for any μ and σ combination.

There is one normal distribution, Z, that is special. It has a $\mu = 0$ and a $\sigma = 1$. This is the Z distribution, also called the *standard normal* distribution. It is one of trillions of normal distributions we could have selected.



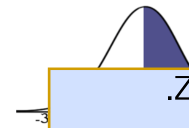
Standard Normal Variable

It is customary to call a standard normal random variable Z.

The outcomes of the random variable Z are denoted by *z*.

The table in the coming slide give the area under the curve (probabilities) between the mean and *z*.

The probabilities in the table refer to the likelihood that a randomly selected value Z is equal to or less than a given value of *z* and greater than 0 (the mean of the standard normal).



STANDARD NORMAL TABLE (Z)

Entries in the table give the area under the curve

من المعتاد تسمية المتغير العشوائي العادي Z.

يتم الإشارة إلى نتائج المتغير العشوائي Z بواسطة z.

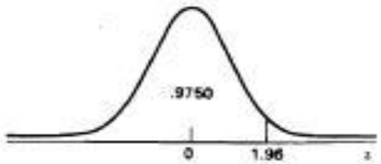
يوضح الجدول الموجود في الشريحة التالية المساحة الموجودة أسفل المنحنى (الاحتمالات) بين المتوسط وz.

تشير الاحتمالات في الجدول إلى احتمالية أن تكون القيمة المختارة عشوائيًا Z مساوية أو أقل من قيمة معينة لـ z وأكبر من 0 (متوسط المعيار الطبيعي).

z										
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998

Table of Normal Curve Areas

TABLE D Normal Curve Areas $P(z \le z_0)$. Entries in the Body of the Table Are Areas Between $-\infty$ and z



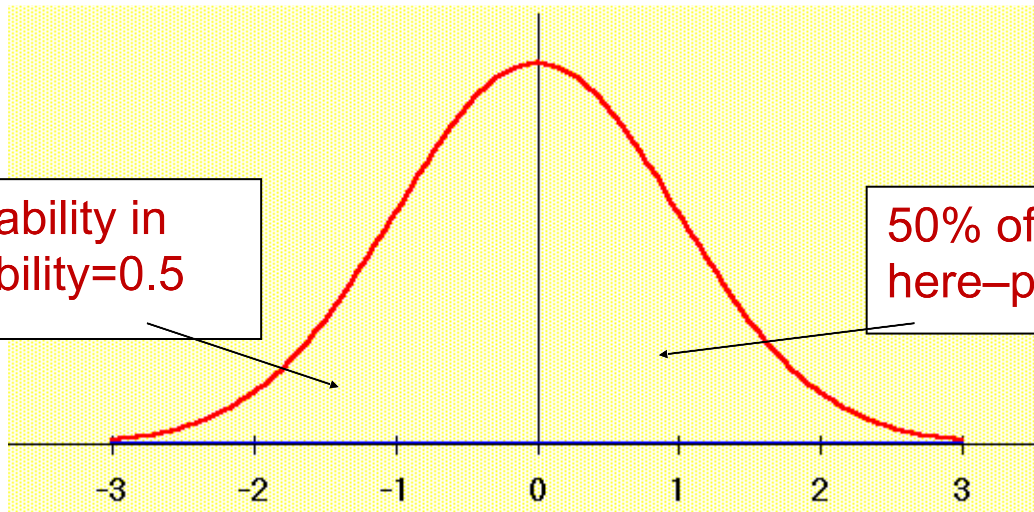
z	−0.09	−0.08	−0.07	−0.06	−0.05	−0.04	−0.03	−0.02	−0.01	0.00	z
−3.80	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	−3.80
−3.70	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	−3.70
−3.60	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	−3.60
−3.50	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	−3.50
−3.40	.0002	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	−3.40
−3.30	.0003	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0005	.0005	.0005	−3.30
−3.20	.0005	.0005	.0005	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0007	.0007	−3.20
−3.10	.0007	.0007	.0008	.0008	.0008	.0008	.0009	.0009	.0009	.0010	−3.10
−3.00	.0010	.0010	.0011	.0011	.0011	.0012	.0012	.0013	.0013	.0013	−3.00
−2.90	.0014	.0014	.0015	.0015	.0016	.0016	.0017	.0018	.0018	.0019	−2.90
−2.80	.0019	.0020	.0021	.0021	.0022	.0023	.0023	.0024	.0025	.0026	−2.80
−2.70	.0026	.0027	.0028	.0029	.0030	.0031	.0032	.0033	.0034	.0035	−2.70
−2.60	.0036	.0037	.0038	.0039	.0040	.0041	.0043	.0044	.0045	.0047	−2.60
−2.50	.0048	.0049	.0051	.0052	.0054	.0055	.0057	.0059	.0060	.0062	−2.50
−2.40	.0064	.0066	.0068	.0069	.0071	.0073	.0075	.0078	.0080	.0082	−2.40
−2.30	.0084	.0087	.0089	.0091	.0094	.0096	.0099	.0102	.0104	.0107	−2.30
−2.20	.0110	.0113	.0116	.0119	.0122	.0125	.0129	.0132	.0136	.0139	−2.20
−2.10	.0143	.0146	.0150	.0154	.0158	.0162	.0166	.0170	.0174	.0179	−2.10
−2.00	.0183	.0188	.0192	.0197	.0202	.0207	.0212	.0217	.0222	.0228	−2.00
−1.90	.0233	.0239	.0244	.0250	.0256	.0262	.0268	.0274	.0281	.0287	−1.90
−1.80	.0294	.0301	.0307	.0314	.0322	.0329	.0336	.0344	.0351	.0359	−1.80
−1.70	.0367	.0375	.0384	.0392	.0401	.0409	.0418	.0427	.0436	.0446	−1.70
−1.60	.0455	.0465	.0475	.0485	.0495	.0505	.0516	.0526	.0537	.0548	−1.60
−1.50	.0559	.0571	.0582	.0594	.0606	.0618	.0630	.0643	.0655	.0668	−1.50
−1.40	.0681	.0694	.0708	.0721	.0735	.0749	.0764	.0778	.0793	.0808	−1.40
−1.30	.0823	.0838	.0853	.0869	.0885	.0901	.0918	.0934	.0951	.0968	−1.30
−1.20	.0985	.1003	.1020	.1038	.1056	.1075	.1093	.1112	.1131	.1151	−1.20
−1.10	.1170	.1190	.1210	.1230	.1251	.1271	.1292	.1314	.1335	.1357	−1.10
−1.00	.1379	.1401	.1423	.1446	.1469	.1492	.1515	.1539	.1562	.1587	−1.00
−0.90	.1611	.1635	.1660	.1685	.1711	.1736	.1762	.1788	.1814	.1841	−0.90
−0.80	.1867	.1894	.1922	.1949	.1977	.2005	.2033	.2061	.2090	.2119	−0.80
−0.70	.2148	.2177	.2206	.2236	.2266	.2296	.2327	.2358	.2389	.2420	−0.70
−0.60	.2451	.2483	.2514	.2546	.2578	.2611	.2643	.2676	.2709	.2743	−0.60
−0.50	.2776	.2810	.2843	.2877	.2912	.2946	.2981	.3015	.3050	.3085	−0.50
−0.40	.3121	.3156	.3192	.3228	.3264	.3300	.3336	.3372	.3409	.3446	−0.40
−0.30	.3483	.3520	.3557	.3594	.3632	.3669	.3707	.3745	.3783	.3821	−0.30
−0.20	.3859	.3897	.3936	.3974	.4013	.4052	.4090	.4129	.4168	.4207	−0.20
−0.10	.4247	.4286	.4325	.4364	.4404	.4443	.4483	.4522	.4562	.4602	−0.10
0.00	.4641	.4681	.4721	.4761	.4801	.4840	.4880	.4920	.4960	.5000	0.00

TABLE D *(continued)*

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	z
0.00	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359	0.00
0.10	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753	0.10
0.20	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141	0.20
0.30	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517	0.30
0.40	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879	0.40
0.50	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224	0.50
0.60	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549	0.60
0.70	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852	0.70
0.80	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133	0.80
0.90	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389	0.90
1.00	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621	1.00
1.10	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830	1.10
1.20	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015	1.20
1.30	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177	1.30
1.40	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319	1.40
1.50	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441	1.50
1.60	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545	1.60
1.70	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633	1.70
1.80	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706	1.80
1.90	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767	1.90
2.00	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817	2.00
2.10	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857	2.10
2.20	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890	2.20
2.30	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916	2.30
2.40	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936	2.40
2.50	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952	2.50
2.60	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964	2.60
2.70	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974	2.70
2.80	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981	2.80
2.90	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986	2.90
3.00	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990	3.00
3.10	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993	3.10
3.20	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995	3.20
3.30	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997	3.30
3.40	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998	3.40
3.50	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	3.50
3.60	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	3.60
3.70	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	3.70
3.80	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	3.80

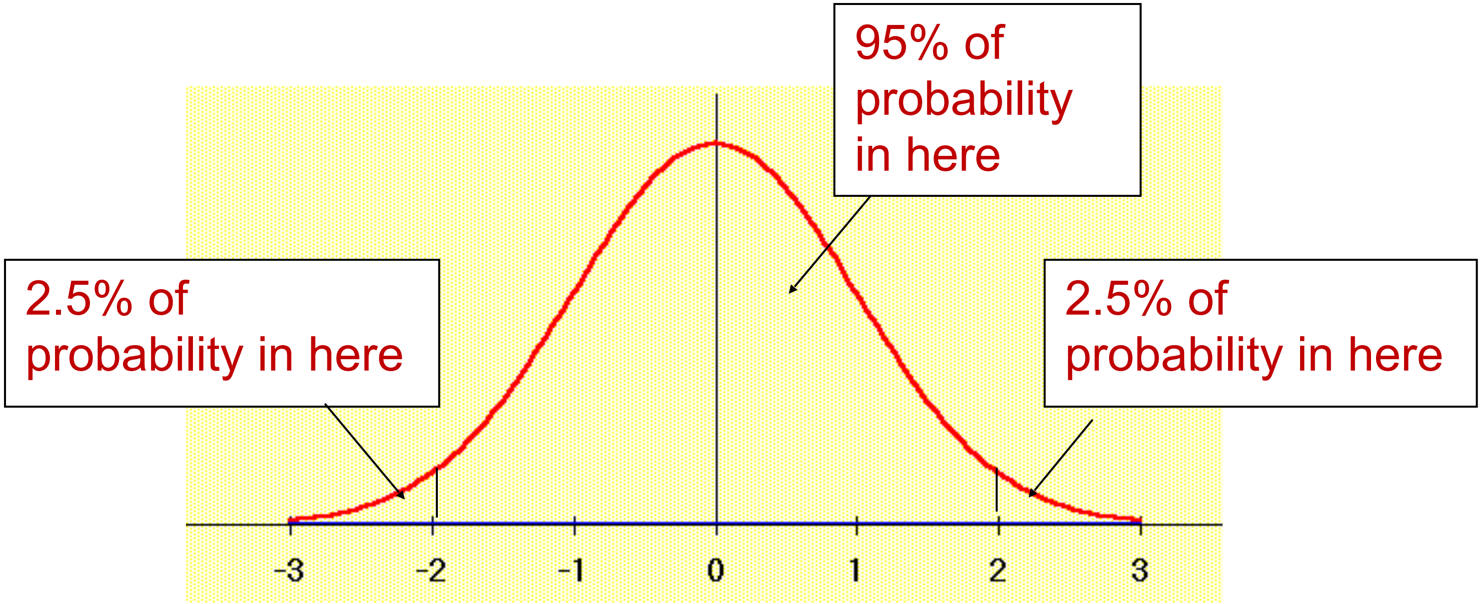
Standard Normal Distribution

50% of probability in here –probability=0.5



50% of probability in here–probability=0.5

Standard Normal Distribution

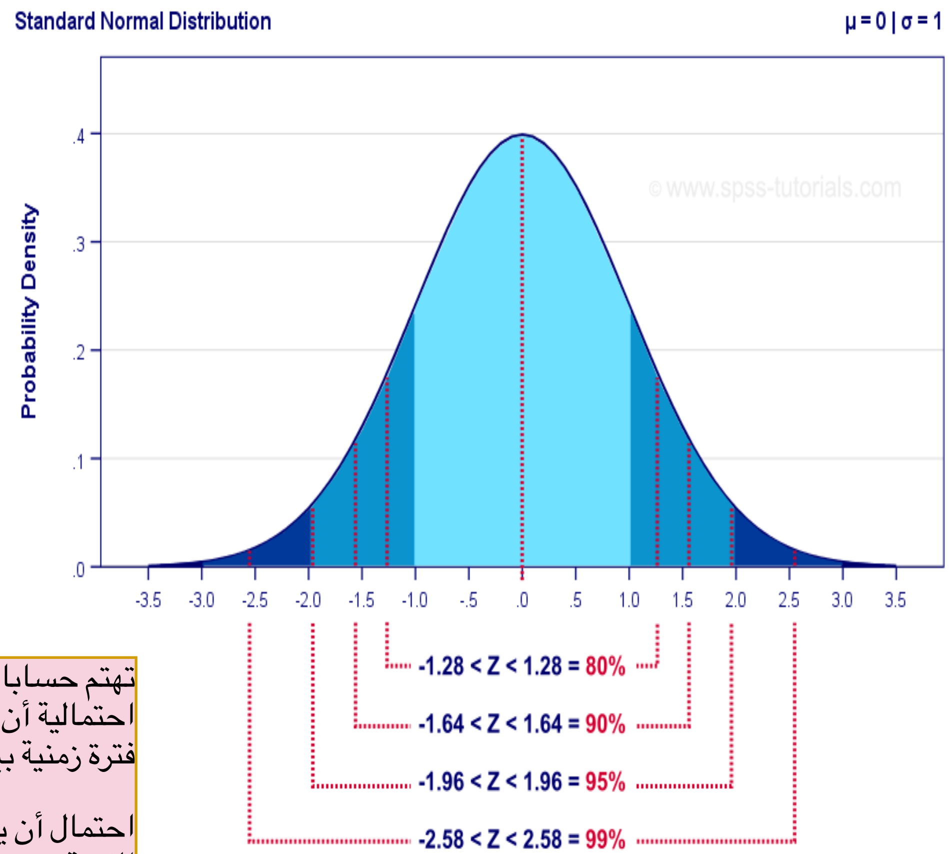


Standard Normal Distribution with 95% area marked

Calculating Probabilities

Probability calculations are always concerned with finding the probability that the variable assumes any value in an interval between two specific points *a* and *b.*

The probability that a continuous variable assumes the a value between *a* and *b* is the area under the graph of the density between *a* and *b.*



تهتم حسابات الاحتمالية دائمًا بإيجاد احتمالية أن يتخذ المتغير أي قيمة في فترة زمنية بين نقطتين محددتين a وb.

احتمال أن يفترض المتغير المستمر القيمة بين a و b هي المنطقة الواقعة تحت الرسم البياني للكثافة بين a و b.

Finding Probabilities

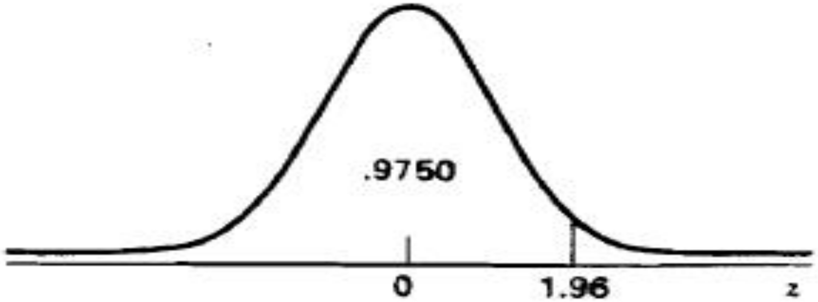
(a) What is the probability that $z < -1.96$?

(1) Sketch a normal curve

(2) Draw a line for $z = -1.96$

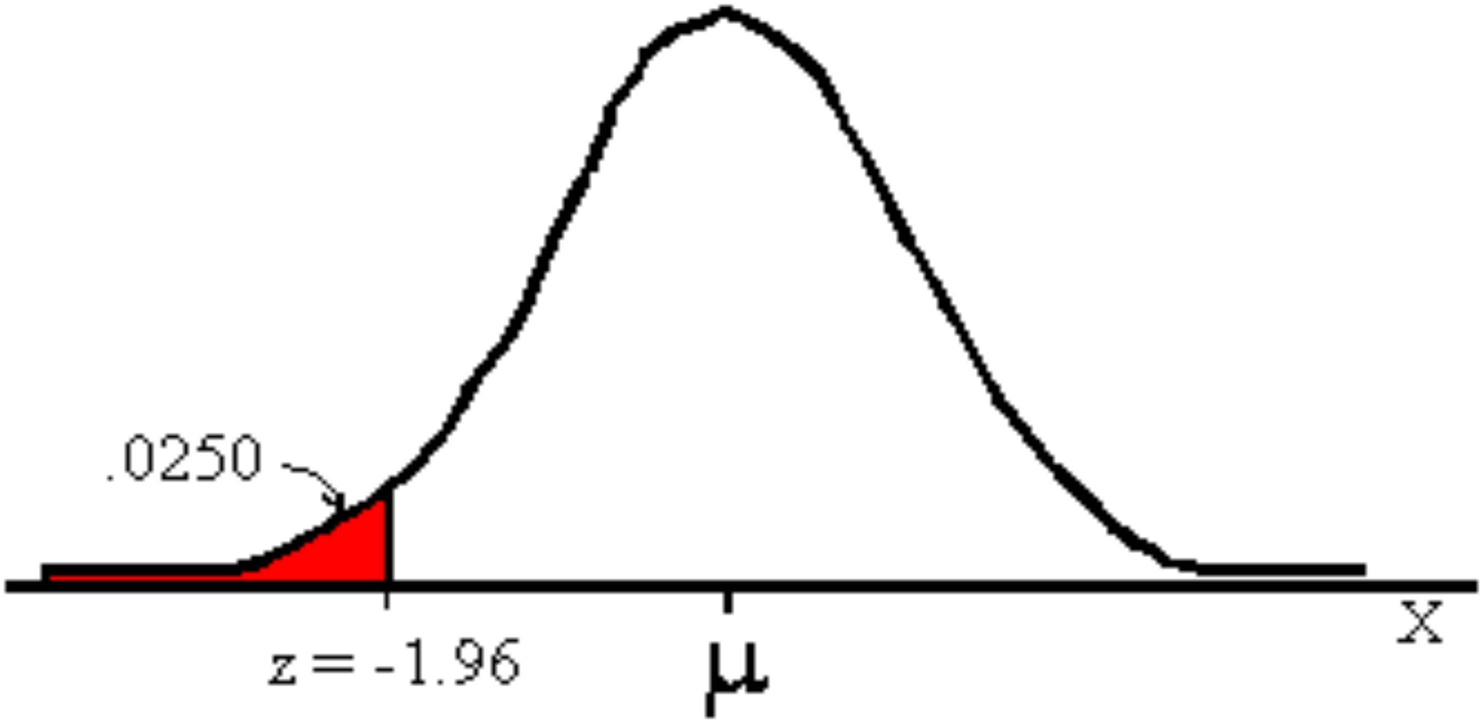
(3) Find the area in the table

(4) The answer is the area to the left of the line $P(z < -1.96) = .0250$



z	−0.09	−0.08	−0.07	−0.06	−0.05	−0.04	−0.03	−0.02	−0.01	0.00	z
−3.80	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	−3.80
−3.70	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	−3.70
−3.60	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	−3.60
−3.50	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	−3.50
−3.40	.0002	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	−3.40
−3.30	.0003	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0005	.0005	.0005	−3.30
−3.20	.0005	.0005	.0005	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0007	.0007	−3.20
−3.10	.0007	.0007	.0008	.0008	.0008	.0008	.0009	.0009	.0009	.0010	−3.10
−3.00	.0010	.0010	.0011	.0011	.0011	.0012	.0012	.0013	.0013	.0013	−3.00
−2.90	.0014	.0014	.0015	.0015	.0016	.0016	.0017	.0018	.0018	.0019	−2.90
−2.80	.0019	.0020	.0021	.0021	.0022	.0023	.0023	.0024	.0025	.0026	−2.80
−2.70	.0026	.0027	.0028	.0029	.0030	.0031	.0032	.0033	.0034	.0035	−2.70
−2.60	.0036	.0037	.0038	.0039	.0040	.0041	.0043	.0044	.0045	.0047	−2.60
−2.50	.0048	.0049	.0051	.0052	.0054	.0055	.0057	.0059	.0060	.0062	−2.50
−2.40	.0064	.0066	.0068	.0069	.0071	.0073	.0075	.0078	.0080	.0082	−2.40
−2.30	.0084	.0087	.0089	.0091	.0094	.0096	.0099	.0102	.0104	.0107	−2.30
−2.20	.0110	.0113	.0116	.0119	.0122	.0125	.0129	.0132	.0136	.0139	−2.20
−2.10	.0143	.0146	.0150	.0154	.0158	.0162	.0166	.0170	.0174	.0179	−2.10
−2.00	.0183	.0188	.0192	.0197	.0202	.0207	.0212	.0217	.0222	.0228	−2.00
−1.90	.0233	.0239	.0244	.0250	.0256	.0262	.0268	.0274	.0281	.0287	−1.90
−1.80	.0294	.0301	.0307	.0314	.0322	.0329	.0336	.0344	.0351	.0359	−1.80
−1.70	.0367	.0375	.0384	.0392	.0401	.0409	.0418	.0427	.0436	.0446	−1.70
−1.60	.0455	.0465	.0475	.0485	.0495	.0505	.0516	.0526	.0537	.0548	1.60

Finding Probabilities



Finding Probabilities

(b) What is the probability that $-1.96 < z < 1.96$?

(1) Sketch a normal curve

(2) Draw lines for lower $z = -1.96$, and

upper $z = 1.96$

(3) Find the area in the table corresponding to each value

(4) The answer is the area between the values.

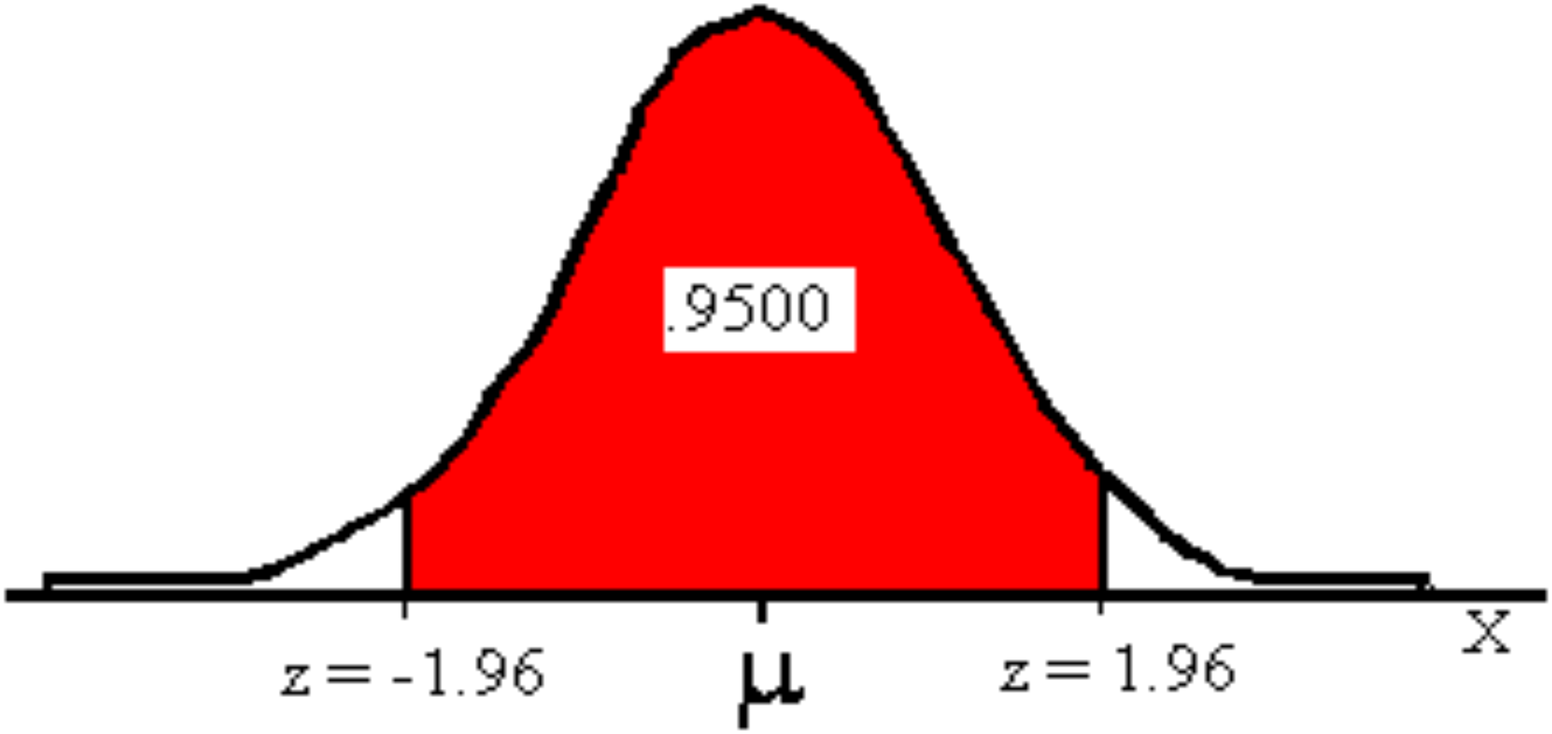
Subtract lower from upper:

$P(-1.96 < z < 1.96) = .9750 - .0250 = .9500$

TABLE D *(continued)*

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	z
0.00	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359	0.00
0.10	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753	0.10
0.20	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141	0.20
0.30	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517	0.30
0.40	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879	0.40
0.50	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224	0.50
0.60	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549	0.60
0.70	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852	0.70
0.80	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133	0.80
0.90	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389	0.90
1.00	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621	1.00
1.10	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830	1.10
1.20	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015	1.20
1.30	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177	1.30
1.40	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319	1.40
1.50	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441	1.50
1.60	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545	1.60
1.70	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633	1.70
1.80	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706	1.80
1.90	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767	1.90
2.00	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817	2.00
2.10	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857	2.10
2.20	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890	2.20
2.30	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916	2.30
2.40	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936	2.40

Finding Probabilities



Finding Probabilities

(c) What is the probability that $z > 1.96$?

(1) Sketch a normal curve

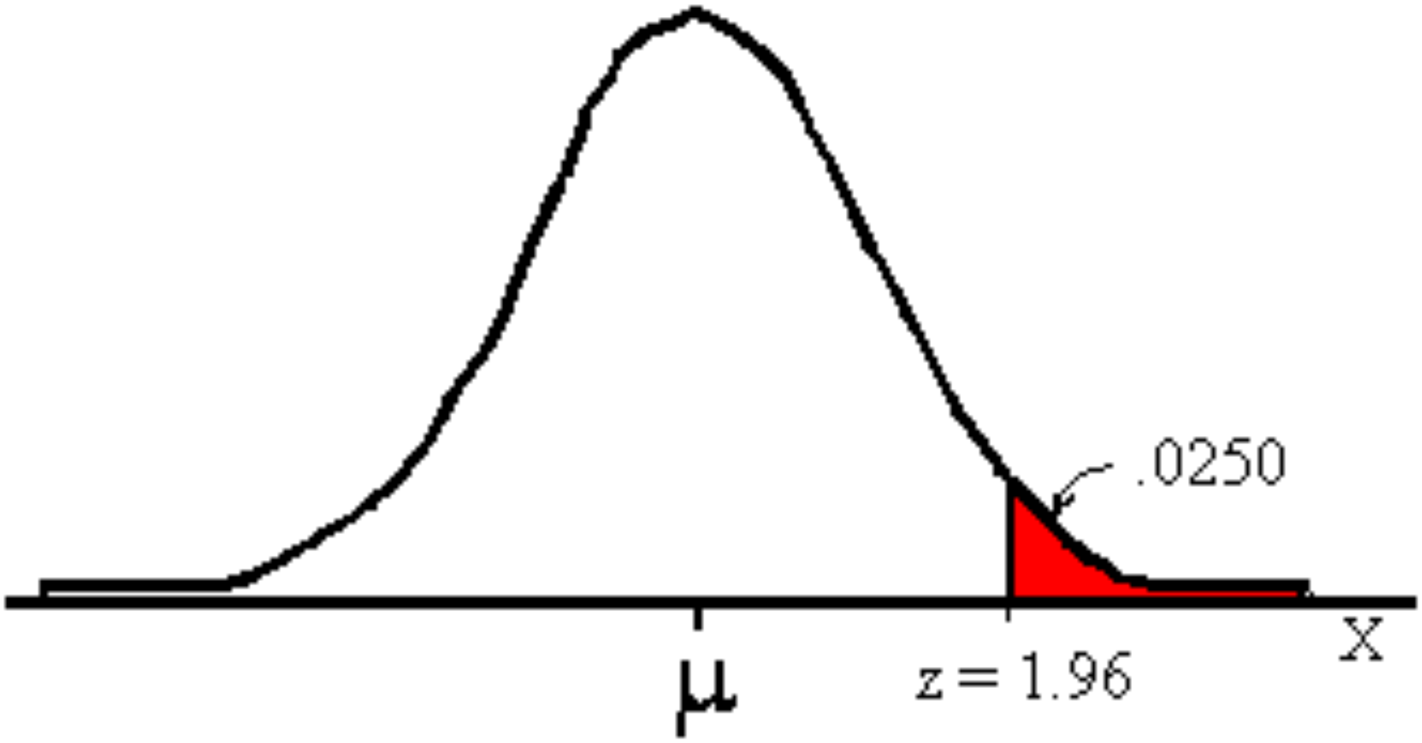
(2) Draw a line for $z = 1.96$

(3) Find the area in the table

(4) The answer is the area to the right of the line. It is found by subtracting the table value from 1.0000:

$P(z > 1.96) = 1.0000 - .9750 = .0250$

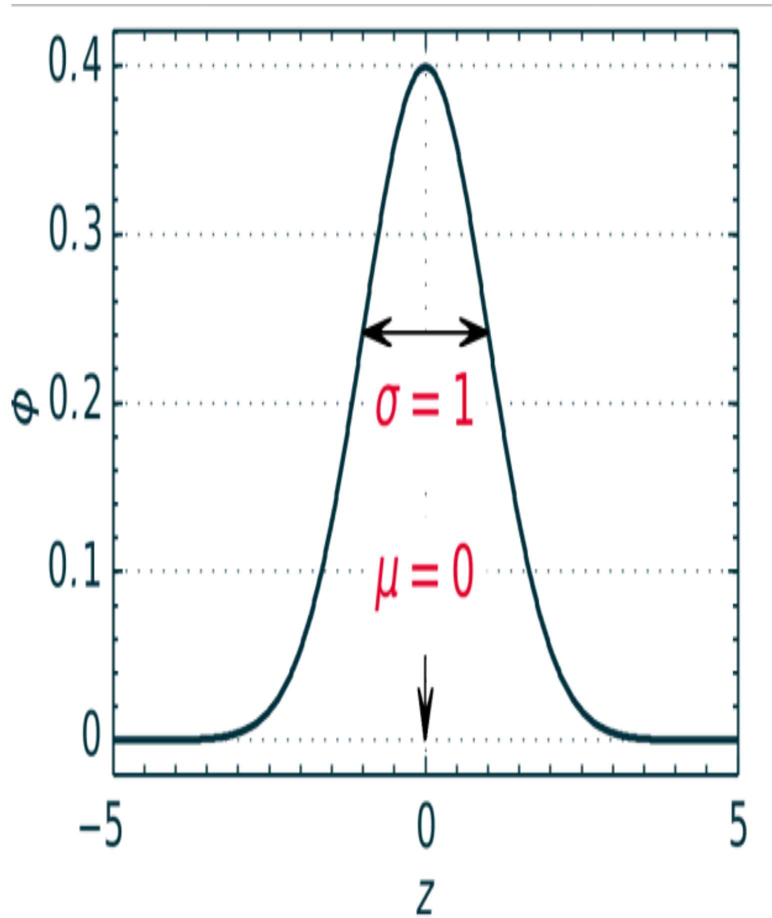
Finding Probabilities



Example: Weight

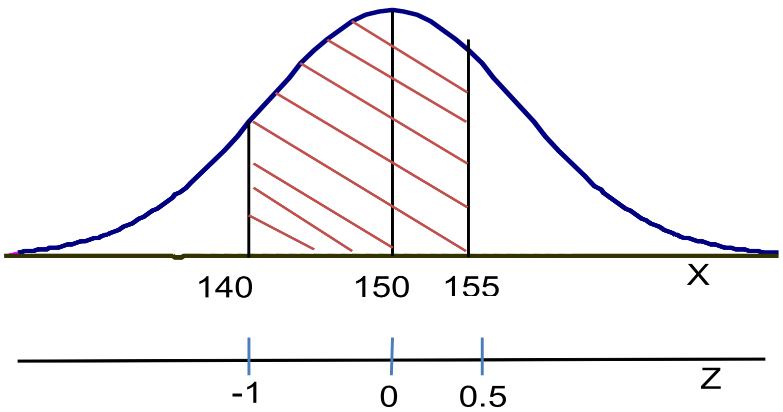
If the weight of males is N.D. with μ=150 and σ=10, what is the probability that a randomly selected male will weigh between 140 lbs and 155 lbs?

[Important Note: Always remember that the probability that X is equal to any one particular value is zero, P(X=*value*) =0, since the normal distribution is continuous.]



Example: Weight

Solution:



Z = (140 – 150)/ 10 = -1.00 s.d. from mean

Area under the curve = .3413 (from Z table)

Z = (155 – 150) / 10 =+.50 s.d. from mean

Area under the curve = .1915 (from Z table)

Answer: .3413 + .1915 = .5328

Example: IQ

If IQ is ND with a mean of 100 and a S.D. of 10, what percentage of the population will have

(a) IQs ranging from 90 to 110?

(b) IQs ranging from 80 to 120?

Solution:

$Z = (90 – 100)/10 = -1.00$

$Z = (110 - 100)/ 10 = +1.00$

Area between 0 and 1.00 in the Z-table is .3413; Area between 0 and -1.00 is also .3413 (Z-distribution is symmetric).

Answer to part (a) is .3413 + .3413 = .6826.

Example: IQ

(b) IQs ranging from 80 to 120?

Solution:

Z = (80 – 100)/10 = -2.00

Z = (120 -100)/ 10 = +2.00

Area between =0 and 2.00 in the Z-table is .4772; Area between 0 and -2.00 is also .4772 (Z-distribution is symmetric).

Answer is .4772 + .4772 = .9544.